

ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ

по дисциплине «Математика»

дата 20.11.24

Новый материал (конспект в тетрадь)

Тема: «Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов»

1. Сумма синусов

Сумма синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы на косинус полуразности этих углов

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Пример:

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ + \sin 15^\circ &= 2 \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cdot \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = \\ &= 2 \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{6} \end{aligned}$$

2. Разность синусов

Разность синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полуразности на косинус полусуммы этих углов

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Пример:

$$\begin{aligned} \sin \frac{5}{12} \pi - \sin \frac{\pi}{12} &= 2 \sin \frac{\frac{5}{12} \pi - \frac{\pi}{12}}{2} \cdot \cos \frac{\frac{5}{12} \pi + \frac{\pi}{12}}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

3. Сумма косинусов

Сумма косинусов двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы на косинус полуразности этих углов

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Пример:

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ + \cos 15^\circ &= 2 \cos \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cdot \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = \\ &= 2 \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

4. Разность косинусов

Разность косинусов двух углов равна минус удвоенному произведению синуса полусуммы на синус полуразности этих углов

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Пример:

$$\begin{aligned}\cos \frac{5}{12} \pi - \cos \frac{\pi}{12} &= -2 \sin \frac{\frac{5}{12} \pi + \frac{\pi}{12}}{2} \cdot \sin \frac{\frac{5}{12} \pi - \frac{\pi}{12}}{2} = \\ &= -2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = -2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Решение задач

Задание 1. Упростите выражение $\sin 24^\circ + \sin 36^\circ$

$$\sin 24^\circ + \sin 36^\circ = 2 \sin \frac{24^\circ + 36^\circ}{2} \cos \frac{24^\circ - 36^\circ}{2} = 2 \sin 30^\circ \cos(-6^\circ) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cos 6^\circ = \cos 6^\circ$$

Задание 2. Упростите выражение $\sin 108^\circ - \sin 12^\circ$

$$\begin{aligned}\sin 108^\circ - \sin 12^\circ &= 2 \sin \frac{108^\circ - 12^\circ}{2} \cos \frac{108^\circ + 12^\circ}{2} = 2 \sin 96^\circ \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \sin 96^\circ \\ &= \cos 6^\circ\end{aligned}$$

Задача 3. Представьте в виде произведения: $\cos \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{6}$

$$\begin{aligned}\cos \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{6} &= 2 \cos \left(\frac{5\pi}{24} + \frac{5\pi}{12} \right) \cos \left(\frac{5\pi}{24} - \frac{5\pi}{12} \right) = 2 \cos \left(\frac{15\pi}{24} \right) \cos \left(-\frac{5\pi}{24} \right) \\ &= 2 \cos \left(\frac{15\pi}{24} \right) \cos \left(\frac{5\pi}{24} \right) = 2 \cos \left(\frac{5\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{5\pi}{24} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \cos \alpha\end{aligned}$$

Задача 4. Запишите в виде произведения выражение

Так как $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, то $\frac{1}{2} - \cos \alpha = \cos 60^\circ - \cos \alpha = -2 \sin \frac{60^\circ + \alpha}{2} \sin \frac{60^\circ - \alpha}{2}$.

Задача 5. Представьте в виде произведения выражение $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta$.

Используя определения тангенса, получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}$$

в числителе записана формула синуса суммы справа налево, значит

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

По этой формуле можно находить сумму тангенсов.

Задача 6. Найти $\operatorname{tg} 110^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ$.

Используем доказанное выше равенство:

$$\operatorname{tg} 110^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ = \frac{\sin(110^\circ + 70^\circ)}{\cos 110^\circ \cos 70^\circ} = \frac{\sin 180^\circ}{\cos 110^\circ \cos 70^\circ} = 0.$$

Домашнее задание:

1. Формулы «Сумма и разность синусов и косинусов» знать!

$$1) \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2) \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$3) \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$4) \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

2. Вычислить без таблиц, используя формулы для суммы и разности синусов двух углов:

а) $\sin 105^\circ + \sin 75^\circ$.

б) $\sin 105^\circ - \sin 75^\circ$.

в) $\cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{7\pi}{12}$.

г) $\cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{7\pi}{12}$.

3. Упростить данные выражения:

а) $\sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) + \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)$.

б) $\sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) - \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)$.

Конспект и задания отправляем на электронную почту oles.udalova@yandex.ru